



**הטכניון**  
מכון טכנולוגי  
לישראל

**למידה עמוקה**

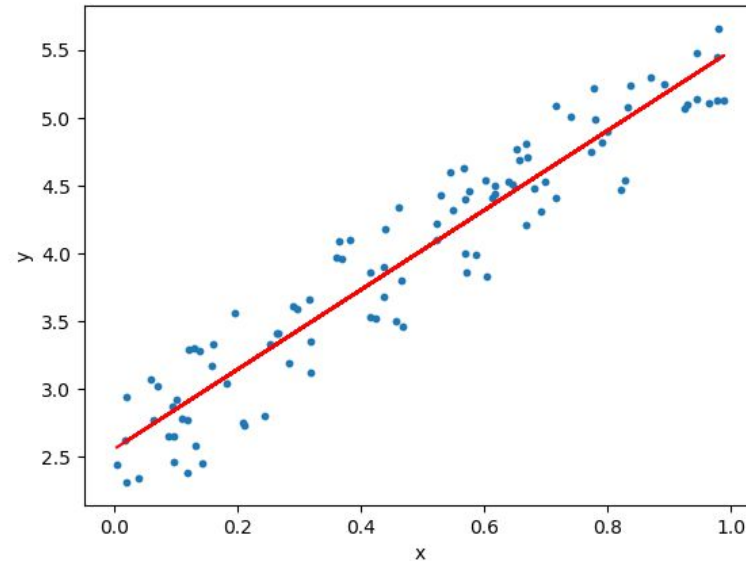
פתרון מקדמי רגרסיה לינארית

# תוכן

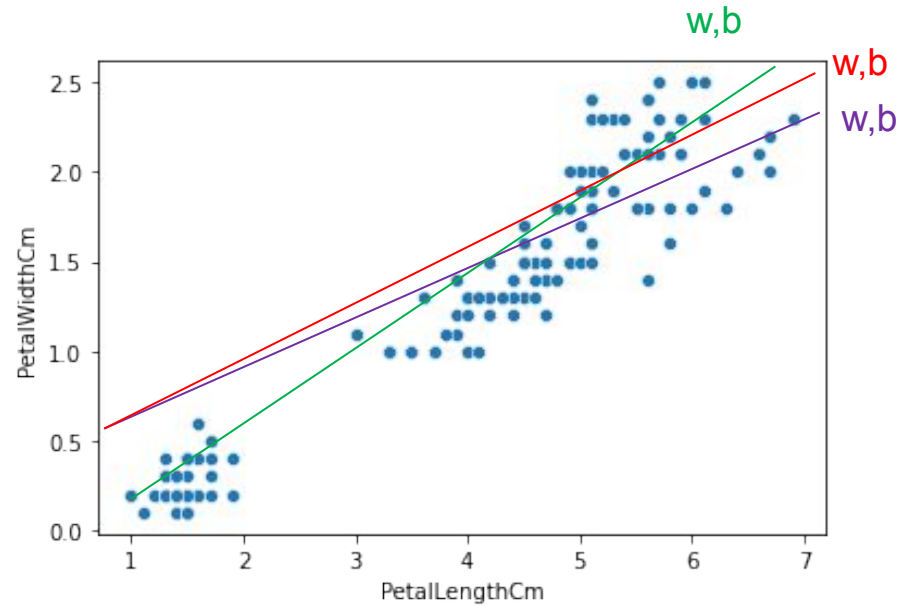
פתרון מקדמי רגרסיה לינארית על ידי השוואת נגזרות לאפס

# רגרסיה לינארית חד ממדית

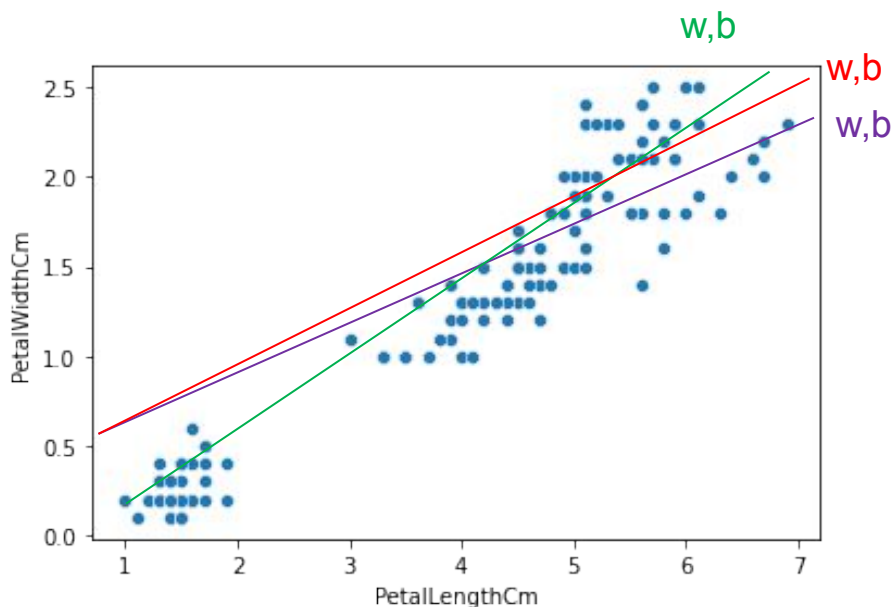
$$\hat{y} = w \cdot x + b$$



# כיצד נחשב את הפרמטרים $w, b$ ?



# רגרסיה לינארית כמכונה לומדת



בהינתן סט של  $m$  דוגמאות  $(x^{(i)}, y^{(i)})$   
 $x^{(i)}$  - ערכי דגימות של המשתנה הבלתי תלוי  
 $y^{(i)}$  - ערכי דגימות המשתנה התלוי בהתאמה

נרצה למצוא מודל רגרסיה אופטימאלי

$$\hat{y} = w \cdot x + b$$

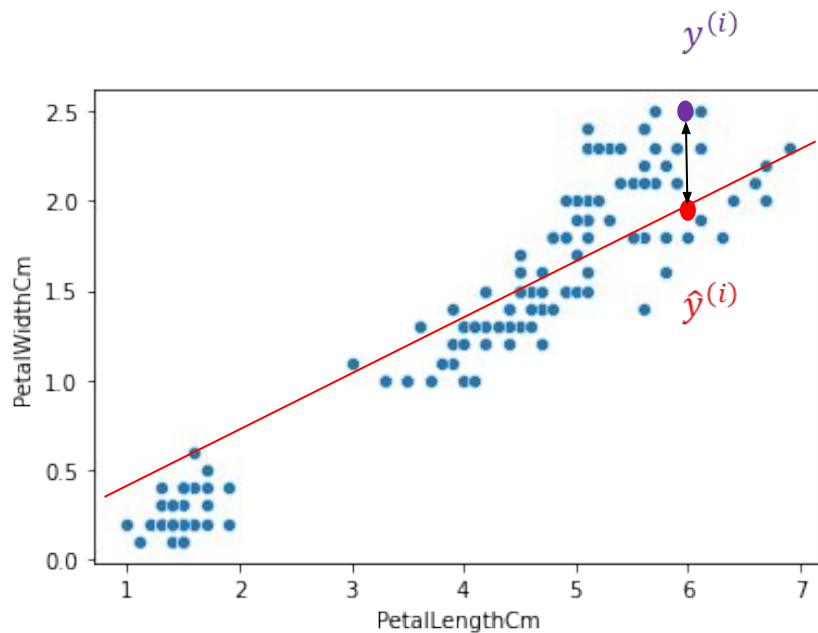
# שגיאת ריבועית על הדוגמא ה-(i)

בהינתן סט של  $m$  דוגמאות  $(x^{(i)}, y^{(i)})$   
 $x^{(i)}$  - ערכי דגימות של המשתנה הבלתי תלוי  
 $y^{(i)}$  - ערכי דגימות המשתנה התלוי בהתאמה

ובהינתן מודל רגרסיה  $\hat{y} = w \cdot x + b$

נגדיר את שגיאת החיזוי על הדוגמא ה-(i):

$$l^{(i)} = (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})^2 = (w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)})^2$$



# פונקציית המחיר J

בהינתן סט של  $m$  דוגמאות  $(x^{(i)}, y^{(i)})$   
 $x_i$  - ערכי דגימות של המשתנה הבלתי תלוי  
 $y_i$  - ערכי דגימות המשתנה התלוי בהתאמה

ובהינתן מודל רגרסיה  $\hat{y} = w \cdot x + b$   
נגדיר את שגיאת החיזוי על כל סט נתוני האימון:

$$J = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)})^2$$

# פונקציית המחיר $J$ היא פונקציה של $w, b$

$$J(w, b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)})^2$$

# תרגיל 1 – מחירי שכירות דירה

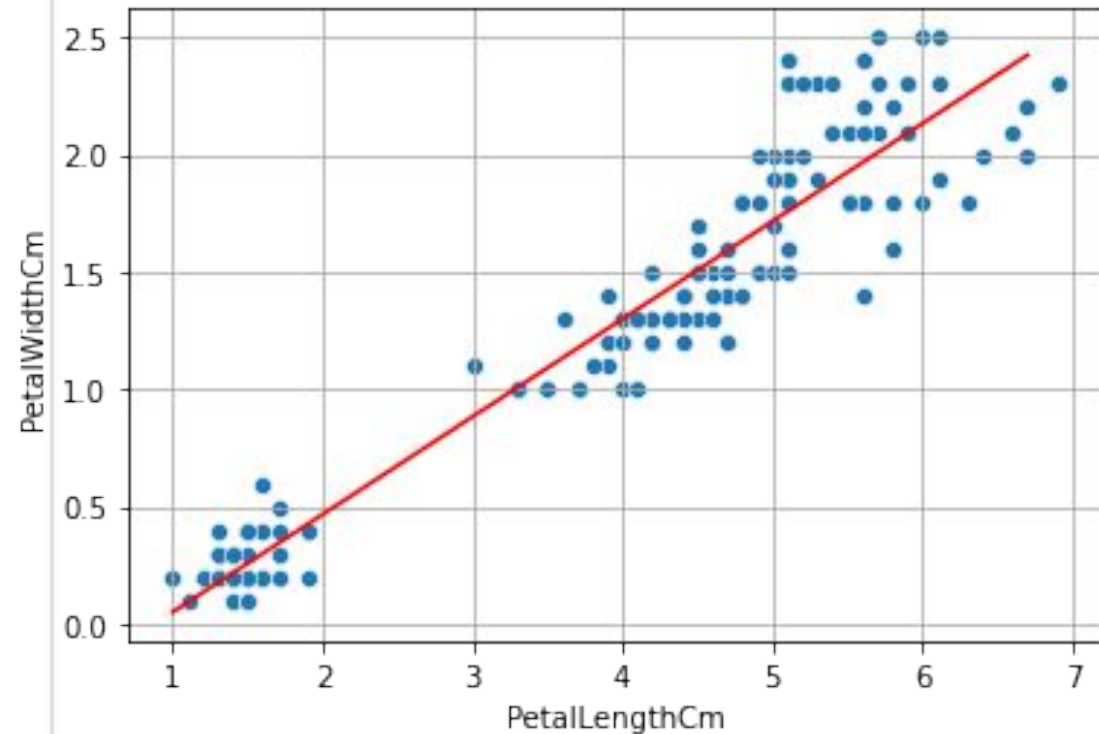
נתונות 4 דוגמאות של מחיר שכירות דירה ( $y$  - באלפי ש"ח) לפי מספר החדרים בדירה ( $x$ ).

$x$	$y$
1	3
2	4
3	8
4	9

כתבו את פונקציית המחיר  $J(w,b)$

# תרגיל 2

כתבו תוכנית המקבלת  $w, b$  ומחשבת את  $J(w, b)$  עבור רגרסיה של Petal width ביחס ל-petal length-  
חשבו את  $J$  בנקודות קרובות לערכים של  $w, b$  אותם מצאנו באחד התרגילים הקודמים וודאו שאלו אכן ערכי נקודת מינימום  
ציירו את  $J$



# חישוב נקודת המינימום של $w, b$ ביחס ל

$$J(w, b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial w} J(w, b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 2(w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)})x^{(i)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} J(w, b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 2(w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)}) = 0$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 2(w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)}) = 0$$

$$\frac{2w}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} + 2b - \frac{2}{m} \sum_{i=1}^m y^{(i)} = 0$$

$$2w\bar{x} + 2b - 2\bar{y} = 0$$

$$b = \bar{y} - w\bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} \text{ שימו לב:}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^{(i)}$$



$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 2(w \cdot x^{(i)} + b - y^{(i)})x^{(i)} = 0$$



$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 2(w \cdot x^{(i)} + \bar{y} - w\bar{x} - y^{(i)})x^{(i)} = 0$$

$$w = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y^{(i)} - \bar{y})x^{(i)}}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x^{(i)} - \bar{x})x^{(i)}} = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x \cdot x} - \bar{x} \cdot \bar{x}}$$

# הפתרון

$$w = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x \cdot x} - \bar{x} \cdot \bar{x}}$$

$$b = \bar{y} - w \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^{(i)}$$

$$\overline{x \cdot x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} x^{(i)}$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} y^{(i)}$$

# תרגיל 3 – מחירי שכירות דירה

נתונות 4 דוגמאות של מחיר שכירות דירה (y - באלפי ש"ח) לפי מספר החדרים בדירה (X).

חשבו את הערכים הבאים:

x	y	x*x	x*y
1	3		
2	4		
3	8		
4	9		

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y^{(i)}$$

$$\bar{x \cdot x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} x^{(i)}$$

$$\bar{x \cdot y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x^{(i)} y^{(i)}$$

$$w = \frac{\bar{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x \cdot x} - \bar{x} \cdot \bar{x}}$$

$$b = \bar{y} - w\bar{x}$$

חשבו את משוואת הרגרסיה  $x * \_ + y = \_$

העריכו את מחיר השכירות של הדירות הבאות:  $x^{(5)}=5, x^{(6)}=-1, x^{(7)}= 2.5$

מהי ההערכה למחיר דירה בת 3 חדרים?

# תרגיל 4 – חישוב מקדמים בפיתון

כתבו סקריפט פיתון לפתרון תרגיל 4.3

# תרגיל 5 – רגרסיה דו ממדית

נתונה רגרסיה לינארית דו ממדית:  $\hat{y} = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + b$

- כתבו את פונקציית המחיר  $J(w_1, w_2, b)$ .
- גזרו את פונקציית המחיר ביחס ל  $w_1, w_2, b$ .
- השוו את הנגזרות ל-0 וחלצו את ערכי  $w_1, w_2, b$ .





**הטכניון**  
מכון טכנולוגי  
לישראל

**שאלות?**